選択肢の数が未知である最良選択問題の階級に対する統一されたアプローチ

トーマス・ブラス

本論文では、候補者、資質の分布、候補者数の分布のいずれも完全に分からない状況下での最良選択問題を統一しようとする。その結果は、e^{-1}が果たす複数の役割のために、私たちが$\boldsymbol{e^{-1}}$**則**と呼ぶものであり、これは古典的な秘書問題の解決だけでなく、より一般的な文脈でも成立する。この統一は、最良選択問題を、条件付き独立到着に関する連続時間決定問題として再定義できるなら、いつでも可能である。また、このアプローチとその意味するところが他のモデルとどのように比較されるかを説明するために、いくつかの例を挙げる。

1.導入。まず、私たちが頻繁に参照することになる、古典的な秘書問題(CSP)、または結婚問題を思い出すことから始める。

n人の候補者がいることを知っており、一人の秘書を選任したいとしよう。すべての候補者を事前に知っていれば、私たち自身の基準に従って、最良の人物$\langle 1\rangle$から最低の人物$\langle n\rangle$まで、候補者を独自の順序で分類できると仮定する。それぞれの並びしかカウントされず、候補者の資質は分からない。候補者を一人ずつ面接することは可能だが、面接のたびに、受け入れるか拒否するかを決めなければならない。撤回は認められない。到着の順番のそれぞれの並び替えが等確率である場合、最良の候補者を受け入れる確率を最大化する戦略とは何か?

この解は、リンドレー(1961 年)に見出せるかもしれないし、一般的なマルコフ連鎖停止時間問題の特殊なケースとして、ディンキンとユシュケヴィッチ(1969 年)に見出せるかもしれない。最適戦略は、ある数$k^*(n)$人の候補者を通過させ、その後、先行するすべての候補者よりも優れた最初の候補者を受け入れることである。$k^*(n)n^{-1} \to e^{-1}$であり、対応する成功確率は、$n \to \infty$としてe^{-1}になる傾向がある。

この問題には多くの興味深い修正版が存在する。これまでに発表された研究の完全なレビューについては、フリーマン(1983 年)を参照されたい。私たちは、候補者数Nが確率変数であり、資質の分布が未知である場合だけに注目する。

この問題に関する結果を最初に発表したのは、プレスマンとソニン(1972 年)のようで、その後、ジャンニーニとサミュエルズ(1976 年)やスチュワート(1981 年)などが続く。これらの論文のいくつかについては、その結果が私たちの結果との興味深い比較を可能にするので、より詳細に参照しよう。これらすべての論文に共通しているのは、候補者数Nの分布gが既知であるか、少なくともgの階級が規定されていることである。

私たちのアプローチの本質的な違いは、gを未知であると仮定することである。他のすべての CSP 条件を維持しながら、最良の候補者を受け入れる確率を最大化したい。次のようなモデルを考える。

2.モデル。$F(z)$を実時間区間$[0,t]$の分布関数、Z_1、Z_2、…を、それぞれが連続分布関数Fを持つ独立した確率変数、NをすべてのZ_kから独立した負でない整数値の確率変数とする。Z_kは応募者kの到着時間と考えられ、Nは面接に姿を現すことを決心した応募者の総数を表す。各応募者には異なる資質が関連づけられる。$N = n$としたとき、並び$\langle 1\rangle$、$\langle 2\rangle$、…、$\langle n\rangle$の各到着順序は確率$1/n!$であると仮定する。

動機。このモデルの仮定の本質的な部分は、Z_kの独立条件である。これらの同一分布は、CSP に由来する最後の仮定によって課される。しかし、撤回できない条件は、同時到着が(ａ．ｓ．(殆ど確実に).)防止される場合にのみ意味があるので、Fは連続であると仮定するのが便利である。私たちの仮説を満たす例として、$[0,t]$上のポアソン過程や非同次ポアソン到着過程を考えることができる。しかし、ｉ．ｉ．ｄ(独立同分布に従う).確率変数を生成する各実験を、適切なポアソン過程として記述することができないため、私たちの仮説の方が一般的である。提案されたモデルが既存のモデルに対する興味深い代替となるかどうかについては、第 6 章で議論する。

3.待機時間方針。私たちは、最良の候補者を選ぶ確率を最大化したいので、先行するすべての候補者よりも優れた候補者を受け入れることだけが理に適っている。このような候補者は、通常、**有力**候補者と呼ばれる。慣例上、最初に到着した候補者を定義上、有力であると仮定する。

ある候補者が有力であるかどうかを決定するためには、それ以前のすべての候補者が評価されていなければならない。連続時間の場合、これは、ある候補者が時間τ、例えば$\tau \in [0,t]$で受け入れられるならば、区間$[0,\tau]$は、Fが厳密に増加しているすべての部分区間で連続的に観測されたことを意味する。このことと、受け入れられた候補者は必ず有力でなければならないという事実は、私たちに次のような階級の戦略を考えるよう促す。

定義。$[0,t]$の(x,r)-戦略とは、次のように行動する方針である。

1. 候補者を受け入れることなく、時間xまでに到着したすべての候補者を観察し、ランク付けする。
2. 時間xの後に到着するr番目の有力候補者、すなわち、$[0,x]$に到着した候補者のうち最良の候補者よりも優れたrランクとなる最初の候補者が、もし存在すれば受け入れ、もし存在しなければすべての候補者を拒否する。

時間xを**待機時間**と呼ぶことにしよう。$r = 1$の場合、***x*-戦略**という表記を使用する。

定理。$P(N > 0) > 0$である任意の分布gに対して、x-戦略の成功確率を最大化する待機時間z^*が存在する。更に、すべての$\varepsilon > 0$に対して、$N \geq m$が$z^* \in [{e_F}^{-1} - \varepsilon, {e_F}^{-1}]$となるような

$m \in \mathbb{N}$が存在する。ここで、$e_F{}^{-1} = \inf\{z|F(z) = e^{-1}\}$である。

証明。以下については、時間の変化を導入するのが便利である。

(1) $x = F(z)$、$z \in [0, t]$

x時間スケールで、時間は0から1まで実行され、各$X_k = F(Z_k)$は$[0,1]$で一様である。

$N = 0$ならば、すべての戦略は取るに足らない成功しかもたらさない。$N = 1$ならば、候補者は時間xの後に到着すれば受け入れられるので、$x^* = 0$となり、対応する成功確率は1に等しくなる。ここで$N \geq 2$とする。$N = n$と仮定すると、最良の候補者$\langle 1\rangle$が、$[0, x]$に到着した候補者のうち最良の候補者よりも優れた、$]x, 1]$に到着している他のすべての候補者よりも前の、$]x, 1]$に到着しているならば、x戦略は成功をもたらす。$k + 1$の最良の候補者を考えよう。このモデルの仮定によれば、$\langle k + 1\rangle$は$[0, x]$に到着し、kの最良の候補者は確率$x(1 - x)^k$で$]x, 1]$に到着する。$\langle 1\rangle$は確率$1/k$で$\langle 2\rangle$、…、$\langle k\rangle$の前に到着するので、次式を得る。

(2) $p_n(x) = P\left(x\text{-戦略の成功}|N = n\right)$

$$= x\sum_{k=1}^{n-1}(1/k)(1 - x)^k + (1 - x)^n/n\text{、但し、}n = 2\text{、}3\text{、}\cdots$$

和の項は、$-\ln x$のテーラー展開に気が付く。

(3) $p_n(x) - p_{n+1}(x) = (1 - x)^{n+1}/(n(n + 1)) \geq 0$、但し、$x \in [0,1]$

となるので、次式を得る。

(4) $p_n(x) \searrow p(x) = -x\ln x$、$n \longrightarrow \infty$のとき

関数$p(x)$は$x = e^{-1}$で最大化される。

更に、

(5) $dp_n(x)/dx = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - x)^k/k$

そして、

(6) $d^2p_n(x)/dx^2 = -(1 - (1 - x)^{n-1})/x \leq 0$、但し、$x \in [0,1]$

従って、$p_n(x)$は一意の最大値x_nを持つ。(5)から明らかなように、

(7) $x_n \nearrow e^{-1}$

ここで、

(8) $G_m(x) = \sum_{n \geq m} p_n(x)P(N = n)$

(7)より、もし$G_m(x)$を最大化する値x^*が存在するなら、必然的に$x^* \in [x_m, e^{-1}]$となる。しかし、(4)と(8)の収束は一様であるため、$G_m(x)$は連続であり、すなわち、x^*が存在する。(1)とFの連続性を用いて証明は完了する。□

この定理は、合わせて**e^{-1}則**と呼びたくなる 2 つの強力な命題を許す。

命題 1。$e_F{}^{-1}$-戦略は、Nの分布がどうであれ、成功確率$\geq e^{-1}$である。

証明。 (4)によれば、[0,1]で$p_n(x) \searrow p(x) = -x \ln x$なので、(1)と(8)により、
(9) $G_0(e^{-1}) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p(e^{-1}) P(N=n) = p(e^{-1}) = e^{-1}$ □

命題 2。$e_F{}^{-1}$-戦略は、命題 1 で記述した性質を持つ唯一の待機時間方針である。

証明。 (6)と(7)から、$e_F{}^{-1}$-戦略がこの性質を持つ唯一のx-戦略であることが分かる。もし$r > 1$ならば、可能性のある成功に対する必要条件は、少なくともr人の有力候補者が存在することである。従って、$P(1 \geq N < r) > 1 - e^{-1}$を有する任意の分布$g$について、$(x, r)$-戦略の成功確率は、すべての$x$について$e^{-1}$より小さい。特に、$P(1 \leq N < r) = 1$ならば、後者は$0$に等しい。□

4.2 人ゲームとしての最良選択問題。 次のようなゲームを考えてみよう。$[0, t]$で到着時間分布関数Fが与えられたとし、プレイヤーA は最良の候補者を受け入れる確率を最大化したいと考え、プレイヤーB はNの分布gを可能な限り最も不利な方法で選択することにより、悪意ある対戦相手の役割を演じる。ミニマックス問題の解である停止時間τ^*と分布g^*を見つけるのは興味深い。
(10) $p(\tau^*, g^*) = \inf_g \sup_\tau p(\tau, g)$
ここで、$p(\tau, g)$はτとgの選択に対応する成功確率を表す。
このゲームでは、3 つの異なる興味深い変化形が許される。
1. A は B に自分の行動を伝える義務があるが、その逆はない。
2. 1 とは逆のケース。
3. A と B は秘密裏に決定を下す。
もし、A が待機時間τ_Wで待機時間方針を適用したければ、定理と命題 2 によって、

(11) $p(\tau_W{}^*, g^*) = \inf_g \sup_{\tau_W} p\big((\tau_W, r), g\big) = \begin{cases} e^{-1}\text{、} r = 1 \text{ のとき} \\ 0\text{、} r > 1 \text{ のとき} \end{cases}$

3 つのケースすべてにおいて、A は$e_F{}^{-1}$-戦略を適用すべきであり、B はgを$N = \infty$に集中させることによって A の成功確率をe^{-1}に減少させる以外に何もできないことを確認するのは難しくない。$e_F{}^{-1}$-戦略は、与えられた仮定の下で、A にとって考えられ得るすべての戦略の中で最良であることさえ推測されるが、その証明にはより多くの手続きが必要である。$e_F{}^{-1}$-戦略の漸近最適性を示すのは簡単である(第 5 章を参照)。

5.上界。 私たちが提起した問題に対して、待機時間方針の研究はただちにx-戦略の研究に限定されたが、$(x, r \geq 2)$-戦略は最適ではない(命題 2)。これは、gに関する部分的な情報が利用可能になるとすぐに変更されるかもしれない。例を挙げるために、決定論的なケース$N = 3$を考えてみよう。(2)と同様の分析から、(0,2)-戦略が成功確率0.5で最適であることが分か

る。これは、最初の候補者を観察し、可能であれば、次の優れた候補者を選択しなければならない CSP の最良停止時間戦略と一致する。実際、私たちのモデルでは、これは、可能であれば、時間0の後に、2 番目に有能な候補者を選択することを意味する。
前の例は、gが完全に規定され、更に一点に集中しているという意味で極端である。また、この例では、$k^*(n)$停止時間戦略(0.5)と${e_F}^{-1}$-戦略(0.3902)の成功確率の差が最大になる場合を表している（表 1 を参照）。結局のところ、$N=3$が分かっていれば、$k^*(3)$停止時間戦略が最適であることが分かるので、私たちはもちろん、ただちにこれを適用するだろう。
それでも、与えられた例は次の疑問を提起する。$(x, r \geq 2)$-戦略を検討する価値があるような、つまり、成功確率がe^{-1}を超えるようなgに関する情報はどのくらい必要か?
1 つのアイデアを得るために、$L(N)=I(1)+I(2)+\cdots+I(N)$を定義する。ここで、$k$番目の到着が有力候補者であるなら$I(k)=1$、それ以外は$0$であり、$L(0)=0$とする。

$(x, r \geq 2)$-戦略が確率$>e^{-1}$で成功するための必要条件は、明らかに$P(L(N) \geq r)>e^{-1}$である。$I(k)$は$P(I(k)=1)=k^{-1}$の独立確率変数であることが知られている（例えば[2]、83 ページを参照）。これは、$E(L(N)|N=n)=1+2^{-1}+\cdots+n^{-1} \sim \ln n$と$\operatorname{Var}(L(N)|N=n)=2^{-1}-2^{-2}+\cdots+n^{-1}-n^{-2} \sim \ln n \left(=0、n<2 \text{ のとき}\right)$を意味する。上記の推定でチェビチェフ不等式を用いると、$E(\ln N)$に関する必要条件を得る。従って、適用可能性のために見送っていた、gについての本質的な仮説が必要となる。これこそ、私たちがx-戦略、この命題に従って${e_F}^{-1}$-戦略に集中する理由である。
ここで、CSP に対する$k^*(n)$停止時間戦略の成功確率を$\bar{p}_n$とする。この戦略は、$\bar{p}_n=e^{-1}+\mathcal{O}(1/n)$で最適であることが知られている。ここで、すべての$n=1、2、\cdots$に対して$\mathcal{O}(1/n) \geq 0$である。私たちは、$[0, t]$の独立した到着時間を有する$n$人の候補者を分布関数$F$に関連づけた私たちのモデルに CSP を当てはめるかもしれない。(2)、(6)、及び命題 1 から、次式を得る。

表 1

$N=n$	**1**	**2**	**3**	**5**	**10**	**15**	**→**
x_n	0	0	0.2679	0.3489	0.3670	0.3678	e^{-1}
$p_n(x_n)$	1	0.5	0.3987	0.3723	0.3680	0.3678	e^{-1}
$p_n({e_F}^{-1})$	0.6321	0.4323	0.3902	0.3718	0.3680	0.3678	e^{-1}
最大損失	<0.368	<0.068	<0.009	$<10^{-3}$	$<10^{-5}$	$<10^{-8}$	

最初の行は、$p_n(x)$を最大化する値x_nを与えている。2 番目と 3 番目の行は、それぞれx_n-戦略と${e_F}^{-1}$-戦略の成功確率を示す。最後の行にあるこれらの差は、$P(N \geq n)=1$に対する最大損失である。数字e^{-1}は 4 回目、つまり、候補者をまったく受け入れない確率として現れる可能性がある。

(12) $e^{-1} \le p_n(e^{-1}) \le p_n(x_n) \le \bar{p}_n = e^{-1} + \mathcal{O}(1/n)$、$n = 1$、2、…
従って、Nが確率的に大きくなれば、${e_F}^{-1}$-戦略は漸近的に最適となる。一方、$p_n(x_n)$は非常に速くe^{-1}に収束する。$n > 3$のときの概算$p_n(x_n) - e^{-1} < 0.68^n/n$は(2)から簡単に導出できる。
$\left(p_n(x_n) - p_n(e^{-1})\right) \to 0$の収束速度は実に驚くほど速い(表 1 を参照)。$g$依存の最大化問題($G_0(x)$max!)が私たちのモデルで意味をなすほど$P(N \le 2)$が大きくなければ、$e^{-1}$が$x^*$の優れた近似であるので、これが本論文の中心をなす。

6.考察と例。提案されたモデルが既存のモデルに代わる興味深いモデルであるかどうかという問題は、区別されなければならない。数学的な観点からすれば、それは単なる代替手段である。gとFのどちらが推定しやすいかは、実際問題の文脈に依存する。
応用問題の場合、その答えは「はい」であるべきである。現実世界の殆どの意思決定問題では時間が介在し、そうでなくても、時間がしばしば計算されるかもしれない(例 4 を参照)。第二に、候補者**数**の分布に関する情報も、より相応しい候補者が、仮にいるとして、**いつ**現れるかに関する極めて本質的な兆候もまったく持てない状況がたくさん存在する。このような状況の簡単な例は、次のような問題である。
緊急に秘書が必要になったため、次のt週間以内に秘書を一人雇いたいと仮定しよう。私たちは、土曜日版で募集を中止するまで広告掲載するよう新聞社に発注した。gが何であれ、他の日よりも週末以降に電話がかかってくる可能性が高いと予測できるから、土曜日の回数とともにピークが減少すると考えるのは、妥当な推測である。
このアイデアは、$[0, t]$上にそのような尤度曲線を描き、それを密度f、例えば$F(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau$を用いて正規化するというものである。このとき、$f$の悪い推定が必ずしも${e_F}^{-1}$の悪い推定を意味するとは限らないような積分の平滑化効果を期待することもできる(例 4 を参照)。
以下では、異なるモデルが一致するかもしれない私たちのアプローチの統一的な特徴を示す例を挙げる。

例 1(CSP)。候補者を$[0, t]$の i.i.d.到着時間に関連づけても一般性が失われることはない。$N(\tau)$を時間τまでの到着回数としよう。このとき、$N(t) \to \infty$において殆ど確実に$N({e_F}^{-1})/N(t) \to e^{-1}$であるため、大数の法則から極限関係$k^*(n)/n \to e^{-1}$が導かれる。

例 2。プレスマンとソニン(1972 年)は、Nがパラメータλのポアソン分布であるなら、最適停止時間の極限関係は$k^*(\lambda)/\lambda \to e^{-1}$であることを示した。到着時間を関連づけたとすると、$N(\tau)$は、順序なしの条件付き到着時間が i.i.d.であり、$[0, t]$上で一様であることを意味するポアソン分布である点に注意されたい。従って、任意の$\lambda > 0$に対して${e_F}^{-1} = e^{-1}t$となり、この待機時間方針はλが分からなくても適用できる。収束の速さを見るために、若い女性が

次のt年以内に最良の伴侶を見つけたいと仮定しよう。彼女は、その到着過程を$\lambda t > 100$のポアソン分布であると仮定し、$e^{-1}t$-戦略を適用する。但し、Nは3だけであることが分かっている。それにも拘わらず、ポアソン分布の仮定が正しければ、彼女の戦略は優秀である。彼女は、最良の伴侶を手に入れた場合と比較して、0.009の成功確率を失うのみである(表 1 を参照)。

例 3。スチュワート(1981 年)(以前、連続時間モデルの利点を指摘した)は、指数関数的な到着間隔時間過程を研究した。しかし、そのような到着過程はポアソン分布であり、私たちのモデルに関して、これは例 2 と等価である。
この結果は一般化できる。強度$\lambda(s)$を持つ非同次ポアソン過程を考えよう。順序なしの到着時間は、条件付き分布関数$F(x) = m(x)/m(t)$を持つ i.i.d.確率変数である。ここで、$m(x) = \int_0^x \lambda(s)ds$である。従って、$m(x) = e^{-1}m(t)$を解き、$x$-戦略を適用する。

例 4。特定の最良選択問題に対して、e^{-1}則と相容れないように見えるかもしれない解が存在する。アブデル・ハミドら(1982 年)は、「Nが分からなければ、最良選択問題には多くの合理的な解が存在する」と言っている。これは正しいが、現実世界の問題に関して、異なる隠された制約に応じて異なる解を持つかもしれない、と言った方が正確である。例えば、プレスマンとソニンは、Nが$\{1,2,\cdots,n\}$で一様であるならば、最適戦略は、最初の$k^*(n)\sim[e^{-2}n]$人の候補者をパスして、次の有力候補者を選択するものであることを証明した。これに対応する成功確率は、$n \to \infty$のとき$2e^{-2}\sim 0.2707$になる傾向がある。秘書問題としては、N人の候補者が同時に現れないならば、仮に現れるとすると撤回が可能になるため、これは理に適っている。このように、時間が介在すると、gについてよりも寧ろ、ここで議論しているように、条件付き到着時間について憶測を立てることができるだろう。実際、すべての$x \in [e^{-2}, 0.6661]$に対して$-x\ln x \geq 2e^{-2}$なので、$e_F{}^{-1}$-戦略の方が$k^*(n)$-戦略よりも(確率的に)悪い結果を招くには、この仮定はかなり間違ってなければならないだろう!
時間が介在しない状況が存在すると主張する人がいるかもしれない。しかし、そういう状況を計算できない、現実的な状況を考えるのは難しい。実際、あなたのアシスタントが、n人の候補者が面接に現れたと伝えていると仮定しよう。しかし、彼は1、2、…、nの番号が付けられたボールから無作為にボールを選び、候補者の人数を、抽出した数字Nに制限した。これらN人の候補者があなたのオフィスの前で待っており、あなたは撤回できない条件下で最良の候補者を見つけなければならない。この場合、gは分かっており、時間は排除されているため、言及された問題は純化した形式になっている。しかし、テーブルの上に置かれた電話帳から辞書式の苗字分布がすぐに得られ、待機時間は最初の37%の名前のうち最後の苗字になるだろうから、「アルファベット順に呼んでくれ」と言うことで目的を達成することができる。同様に、$N \leq n$個のボールが入った壺の中から「最良の」ボールを選ばなければならないとすると、あなたは、$m \gg n$個の無地のボールを追加して混ぜ、$[e^{-1}m]$番目を抽

出した後の最初の有力ボールを選ぶかもしれない。もちろん、問題の定義によって再定義や計算が明示的に禁止されているならば、最適戦略は前述の$k^*(n)$方針である。これが隠された制約の意味していたことである。